Jochen Weber

Aufgaben zur Kugel

1 Die Maßzahlen von Volumen und Oberfläche einer Kugel sind gleich.
Berechnen Sie den Radius der Kugel.

2 Vergrößert man den Radius einer Kugel um 3 cm, so hat die neue Kugel eine um 288 cm^2 größere Oberfläche.
Berechnen Sie die Radien und die Volumina der beiden Kugeln.

3 Einem Würfel mit der Kantenlänge 6,5 cm ist eine Kugel umbeschrieben.
Bestimmen Sie, um wie viel Prozent die Kugeloberfläche größer ist als die Oberfläche des Würfels.

4 Bestimmen Sie, um wie viel Prozent sich das Volumen (die Oberfläche) einer Kugel vergrößert, wenn man den Radius verdoppelt.

5.0 In einem Würfel mit der Kantenlänge a liegen acht gleich große Kugeln mit dem Durchmesser 0,5a.

5.1 Ermitteln Sie, wie viel Prozent des Würfelvolumens noch übrig bleiben.

5.2 Bestimmen Sie, um wie viel Prozent die Summe der Oberflächen der Kugeln größer ist als die Würfeloberfläche.

6.0 Ein Basketball hat einen Durchmesser von 24,2 cm, ein Tennisball von 6,4 cm.

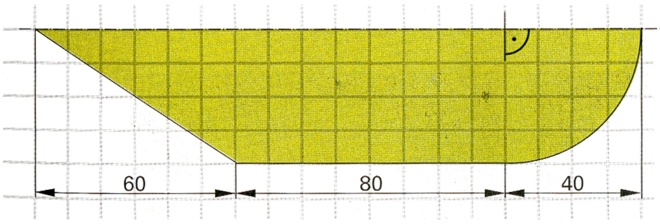
6.1 Bestimmen Sie, um wie viel Prozent der Basketball ein größeres Volumen hat als der Tennisball.

6.2 Der Umfang eines Fußballs darf zwischen 68 cm und 71 cm groß sein.
Ermitteln Sie, zwischen welchen Grenzen sich dann Volumen und Oberfläche bewegen.

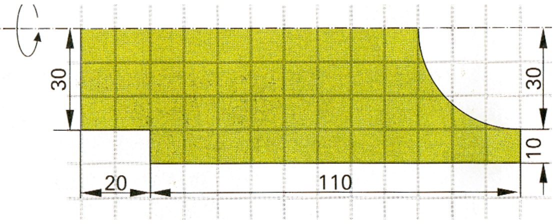
Jochen Weber

7.0 Die in folgendem Bild dargestellten Figuren rotieren um die angegebene Achse. Berechnen Sie mit den eingetragenen Maßen (in mm) Volumen und Oberfläche der Rotationskörper.

7.1



7.2



Jochen Weber

Lösungen

1 $V_{Kugel} = O_{Kugel} \quad \Rightarrow \frac{4}{3}r^3\pi = 4r^2\pi \quad \Rightarrow \frac{4}{3}r = 4 \quad \Rightarrow r = 3$

2

$O_{alte\,Kugel} = 4r^2\pi \quad O_{neue\,Kugel} = 4(r+3)^2\pi$

$\Rightarrow 4r^2\pi + 288 = 4(r+3)^2\pi \quad \Rightarrow 4r^2\pi + 288 = 4(r^2+6r+9)\pi$

$\Rightarrow 4r^2\pi + 288 = 4r^2\pi + 24r\pi + 36\pi \quad \Rightarrow 24r\pi = 288 - 36\pi$

$\Rightarrow r = \frac{288-36\pi}{24\pi} = 2{,}32\,cm$

Radius neue Kugel $= 2{,}32 + 3 = 5{,}32$

$V_{alte\,Kugel} = \frac{4}{3}(2{,}32)^3 \cdot \pi = 52{,}31\,cm^3$

$V_{neue\,Kugel} = \frac{4}{3}(5{,}32)^3 \cdot \pi = 630{,}7\,cm^3$

3

$O_{Kugel} = 4r^2\pi$

Berechnung des Radius der Kugel: $r_k = \frac{1}{2} \cdot$ Raumdiagonale Würfel

Berechnung der Raumdiagonale des Würfels:

$d_{Raum}{}^2 = d_{Grundfläche}{}^2 + 6{,}5^2 = (6{,}5 \cdot \sqrt{2})^2 + 6{,}5^2 = 3 \cdot 6{,}5^2 \Rightarrow d_{Raum} = 6{,}5 \cdot \sqrt{3}$

$O_{Kugel} = 4 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 6{,}5 \cdot \sqrt{3})^2 \cdot \pi = 398{,}20\,cm^2 \qquad O_{Würfel} = 6 \cdot 6{,}5^2 = 253{,}50\,cm^2$

$253{,}50\,cm^2 \qquad 100\%$

$398{,}20\,cm^2 \qquad x\% \qquad \Rightarrow x = \frac{398{,}20 \cdot 100\%}{253{,}50} = 157{,}08\%$

Die Oberfläche der Kugel ist um 57,08% größer als die Oberfläche des Würfels

4

$V_{alte\,Kugel} = \frac{4}{3}r^3\pi \qquad V_{neue\,Kugel} = \frac{4}{3}(2r)^3\pi = 8 \cdot \frac{4}{3}r^3\pi$

Das Volumen der neuen Kugel ist achtmal so groß, also vergrößert es sich um 700%

$O_{alte\,Kugel} = 4r^2\pi \qquad O_{neue\,Kugel} = 4(2r)^2\pi = 4 \cdot 4r^2\pi$

Die Oberfläche der neuen Kugel ist viermal so groß, also vergrößert sie sich um 300%

5.1

$V_{Kugeln} = 8 \cdot \frac{4}{3} r^3 \pi = 8 \cdot \frac{4}{3} (0{,}25a)^3 \pi = \frac{32}{3} \cdot \frac{1}{64} a^3 \pi = \frac{1}{6} a^3 \pi$

$V_{Würfel} = a^3$

a^3 100%

$\frac{1}{6} a^3 \pi$ x% $\Rightarrow x = \frac{\frac{1}{6} a^3 \pi \cdot 100\%}{a^3} = 52{,}36\%$

Es bleiben noch 100%-52,36%=47,64% übrig

5.2

$O_{Kugeln} = 8 \cdot 4 r^2 \pi = 8 \cdot 4 \cdot (0{,}25a)^2 \pi = 32 \cdot \frac{1}{16} a^2 \pi = 2a^2 \pi$

$O_{Würfel} = 6a^2$

$6a^2$ 100%

$2a^2\pi$ x% $\Rightarrow x = \frac{2a^2 \pi \cdot 100\%}{6a^2} = 104{,}72$

Die Summen der Kugeloberflächen ist um 4,72% größer als die Würfeloberfläche

6.1

$V_{Basketball} = \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{4}{3} (12{,}1)^3 \pi = 7420{,}70\,cm^3$

$V_{Tennisball} = \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{4}{3} (3{,}2)^3 \pi = 137{,}26\,cm^3$

$137{,}26\,cm^3$ 100%

$7420{,}70\,cm^3$ x% $\Rightarrow x = \frac{7420{,}70 \cdot 100\%}{137{,}26} = 5406{,}31\%$

Das Volumen des Basketballs ist um 5306,31%größer als das des Tennisballs

6.2

$U_{Fußball1} = 2r\pi = 68 \quad \Rightarrow r = \frac{68}{2\pi} = 10{,}82\,cm$

$U_{Fußball2} = 2r\pi = 71 \quad \Rightarrow r = \frac{71}{2\pi} = 11{,}3\,cm$

$V_{Fußball1} = \frac{4}{3} \cdot (10{,}82)^3 \cdot \pi = 5306{,}04\,cm^3$ $V_{Fußball2} = \frac{4}{3} \cdot (11{,}3)^3 \cdot \pi = 6043{,}99\,cm^3$

$O_{Fußball1} = 4 \cdot (10{,}82)^2 \cdot \pi = 1471{,}18\,cm^2$ $O_{Fußball2} = 4 \cdot (11{,}3)^2 \cdot \pi = 1604{,}60\,cm^2$

7.1

$$V = V_{Kegel} + V_{Zylinder} + V_{Halbkugel}$$

$$V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 40^2 \cdot 60 = 100530{,}96\,mm^3$$

$$V_{Zylinder} = 40^2 \cdot \pi \cdot 80 = 402123{,}86\,mm^3$$

$$V_{Halbkugel} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 40^3 \cdot \pi = 134041{,}29\,mm^3$$

$$V = 100530{,}96 + 402123{,}86 + 134041{,}29 = 636696{,}11\,mm^3$$

$$O = \text{Mantelfläche Kegel} + \text{Mantelfläche Zylinder} + O_{Halbkugel}$$

$$\text{Mantelfläche Kegel} = r \cdot \pi \cdot m$$

$$m^2 = 40^2 + 60^2 = 5200 \quad \Rightarrow m = 72{,}11\,mm$$

$$A_M = 40 \cdot \pi \cdot 72{,}11 = 9061{,}61\,mm^2$$

$$\text{Mantelfläche Zylinder} = 2r \cdot \pi \cdot h = 2 \cdot 40 \cdot \pi \cdot 80 = 20106{,}19\,mm^2$$

$$O_{Halbkugel} = \frac{1}{2} \cdot 4r^2 \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (40)^2 \cdot \pi = 10053{,}10\,mm^2$$

$$O = 9061{,}61 + 20106{,}19 + 10053{,}10 = 39220{,}9\,mm^2$$

7.2

$$V = V_{Zylinder1} + V_{Zylinder2} - V_{Halbkugel}$$

$$V_{Zylinder1} = r^2 \cdot \pi \cdot h = 30^2 \cdot \pi \cdot 20 = 56548{,}67\,mm^3$$

$$V_{Zylinder1} = r^2 \cdot \pi \cdot h = 40^2 \cdot \pi \cdot 110 = 552920{,}31\,mm^3$$

$$V_{Halbkugel} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 30^3 \cdot \pi = 56548{,}67\,mm^3$$

$$V = 56548{,}67 + 552920{,}31 - 56548{,}67 = 552920{,}31\,mm^3$$

$$O = \text{Grundfläche Zylinder1} + \text{Mantelfläche Zylinder1} + \text{Mantelfläche Zylinder2} + 2 \cdot A_{Kreisring} + O_{Halbkugel}$$

$$\text{Grundfläche Zylinder1} = r^2\pi = 30^2 \cdot \pi = 2827{,}43\,mm^2$$

$$M_{Zylinder1} = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h = 2 \cdot 30 \cdot \pi \cdot 20 = 3769{,}91\,mm^2$$

$$M_{Zylinder2} = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h = 2 \cdot 40 \cdot \pi \cdot 110 = 27646{,}02\,mm^2$$

$$A_{Kreisring} = 40^2 \cdot \pi - 30^2 \cdot \pi = 2199{,}11\,mm^2$$

$$O_{Halbkugel} = \frac{1}{2} \cdot 4r^2 \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (30)^2 \cdot \pi = 5654{,}87\,mm^2$$

$$O = 2827{,}43 + 3769{,}91 + 27646{,}02 + 2 \cdot 2199{,}11 + 5654{,}87 = 44296{,}45\,mm^2$$